ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI RAYLEIGH TUNGGAL DAN DISTRIBUSI RAYLEIGH DUA CAMPURAN

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

ISMA NETI
10854004520

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI RAYLEIGH TUNGGAL DAN DISTRIBUSI RAYLEIGH DUA CAMPURAN

ISMA NETI
10854004520

Tanggal Sidang : 22 Juni 2012
Tanggal Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini menjelaskan tentang bagaimana mengestimasi parameter dari distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran. Tujuannya yaitu untuk memudahkan peneliti menghitung atau menaksir karakteristik dari data uji hidup dari suatu komponen atau sistem. Berdasarkan hasil penelitian maka dapat disimpulkan bahwa estimator maksimum *likelihood* dari parameter distribusi Rayleigh tunggal adalah $\beta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$. Berdasarkan data daya hidup dari 40 komponen elektronik menghasilkan nilai parameter yang berdistribusi Rayleigh tunggal adalah $\beta = 0{,}051$. Sedangkan estimator maksimum *likelihood* untuk distribusi Rayleigh dua campuran dengan memanfaatkan metode numerik yaitu metode Newton Rhapson menghasilkan nilai awal masing-masing paremeter dari distribusi Rayleigh dua campuran adalah $p^7 = 0{,}767$, ${\beta_1}^7 = 0{,}055$ ${\beta_2}^7 = 0{,}028$. Hasil penelitian mengindikasikan bahwa dari dua distribusi tersebut diperoleh distribusi terbaik adalah distribusi Rayleigh dua campuran.

Katakunci: *AIC, distribusi Rayleigh, maksimum likelihood.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya dengan judul "**Estimasi Parameter Distribusi Rayleigh Tunggal dan Distribusi Rayleigh Dua Campuran**". Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana. Selanjutnya limpahan shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad SAW, pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Tugas akhir ini penulis selesaikan tidak terlepas dari batuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Oleh sebab itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terimakasih yang setulus-tulusnya kepada kedua orang tua tercinta, Ayah (Amran) dan Ibu (Manaiyah) yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku, serta buat kakak-adikku tersayang (Lina Marlina, Asrul, M. yusuf, Risma Wati, Dia Susanti), abang iparku dan ponakan (Mustariza dan M. Alfi), abangku tercinta (Batara Satria), serta seluruh keluarga besarku yang telah memberikan motivasi, sehingga penulis mampu menyelesaikan tugas akhir ini. Semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin. Ucapan terimakasih selanjutnya kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Rado Yendra, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

5. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Penguji I dan yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir ini selesai.
6. Rahmadeni, M.Si selaku Penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir selesai.
7. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Koordinator Tugas Akhir yang telah banyak membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini.
8. Semua Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Terima kasih atas semua saran yang diberikan kepada penulis.
9. Sahabat dan teman kosku (kak Wati, Lastri, Siti Rahma, Nurhasimah, Adi Sucipto) yang selalu membantu dalam pembuatan tugas akhir ini.
10. Teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2008.

Semoga amal dan kebaikan yang diberikan kepada penulis mendapatkan balasan dari Allah SWT. Penulis menyadari dalam penulisan tugas akhir ini jauh dari kesempurnaan karena kesempurnaan itu hanya milik Allah SWT oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini selanjutnya.

Akhirnya kepada Allah jualah penulis berlindung agar usaha yang penulis lakukan mendapat ridho-Nya dan menjadi amal sholeh serta berguna bagi penulis dan pihak-pihak lain yang membutuhkannya.

Pekanbaru, Juni 2012

Isma Neti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini berkembang sangat pesat. Sehingga mendorong manusia untuk terus berupaya memanfaatkan kemajuan teknologi tersebut yang diantaranya diwujudkan melalui penelitian-penelitian. Penelitian yang dilakukan dapat berupa penelitian yang bertujuan untuk menemukan dan menyelesaikan masalah-masalah baru, mengembangkan pengetahuan yang ada, maupun penelitian dalam menguji kebenaran suatu pengetahuan. Beberapa penelitian seperti di bidang Biologi, Fisika, Pertanian dan Kedokteran biasanya akan menghasilkan data yang berhubungan dengan waktu hidup dari suatu individu. Data waktu hidup merupakan variabel random non negatif. Analisis statistika yang digunakan untuk menganalisis data waktu hidup tersebut disebut analisis tahan hidup (*survival*).

Analisis uji hidup merupakan suatu analisis terhadap individu-individu suatu populasi dengan memusatkan perhatian pada lamanya waktu individu menjalankan fungsinya dengan baik sampai kematian individu tersebut, yang dinyatakan dengan fungsi selamat dan fungsi bahaya.

Fungsi distribusi tahan hidup yang didasarkan pada pengetahuan atau asumsi tertentu tentang distribusi populasinya termasuk dalam fungsi parametrik. Beberapa distribusi yang dapat digunakan untuk menggambarkan waktu hidup antara lain distribusi Eksponensial, distribusi Weibull, distribusi Gamma, distribusi Rayleigh dan lain-lain (Lawless, 1982). Berdasarkan beberapa distribusi tersebut dipilih fungsi tahan hidup berdistribusi Rayleigh dalam penelitian ini.

Surles dan Padgett (2001) memperkenalkan bahwa distribusi Rayleigh adalah distribusi penting dalam statistik. Hal ini diterapkan dibeberapa daerah seperti kesehatan, pertanian, biologi dan ilmu lainnya. Adapun distribusi Rayleigh memiliki parameter $scale\ parameter\ (\beta)$ dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$f(y) = \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}.$$

W.M. Afify (2009) membahas tentang estimasi dari distribusi campuran Rayleigh, yang masing masing parameter dari distribusi campuran itu adalah p_1 dan p_2 dimana $\sum p_i = 1$, β_1 dan β_2. Penelitian yang bertujuan untuk mendapatkan gambaran mengenai distribusi yang tepat dari data dalam fungsi tahan hidup, dan memerlukan suatu analisis terhadap data waktu hidup. Langkah untuk menganalisis terhadap fungsi distribusi dari data waktu hidup tersebut didahului dengan mengestimasi nilai parameter distribusinya. Oleh karena itu dalam penulisan ini penulis memilih distribusi probabilitas kontinu untuk mengambarkan uji waktu hidup yang akan ditaksir parameternya, dan penulis ungkapkan dalam satu karya ilmiah dengan judul "*Estimasi Parameter Distribusi Rayleigh Tunggal dan Distribusi Rayleigh Dua Campuran".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana bentuk hasil estimasi parameter distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran?

1.3 Batasan Masalah

Adapun untuk membatasi ruang lingkup pada penelitian ini diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi parameter β pada distribusi Rayleigh tunggal dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*.
2. Mengestimasi parameter p, β_1 dan β_2 pada distribusi Rayleigh dua campuran dengan menggunakan metode maksimum *likelihood.*

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah untuk menentukan estimator dari parameter distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran. Dengan mengetahui estimator parameter tersebut dapat memudahkan peneliti untuk menghitung atau menaksir karakteristik dari data uji hidup dari suatu komponen atau sistem.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Secara teoritis akan memberikan tambahan wawasan terhadap ilmu statistika terutama tentang fungsi tahan hidup yang berdistribusi Rayleigh.
2. Penelitian ini bersifat aplikatif maka dapat diterapkan pada ilmu lain di luar statistika misalnya ilmu biologi, kedokteran dan teknik.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuaan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini barisikan landasan teori, seperti defenisi peluang suatu kejadian, distribusi peluang, konsep dasar distribusi waktu hidup, parameter campuran, diastribusi Rayleigh tunggal, distribusi Rayleigh dua campuran, metode estimasi parameter distribusi.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini.

BAB IV Pembahasan dan Hasil

Bab ini berisikan tentang metode maksimum *likelihood* yang digunakan dalam menyelesian penentukan parameter dari distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahsan dan saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Definisi Peluang Suatu Kejadian

Teori peluang mempelajari tentang peluang terjadinya suatu kejadian atau peristiwa. Peluang dinyatakan dalam pecahan atau desimal antara 0 dan 1. Dalam teori peluang, suatu kejadian adalah satu atau beberapa kemungkinan hasil dari suatu tindakan. Tujuan teori peluang adalah menggambarkan dan menaksir rata–rata sedemikian itu dalam bentuk peluang kejadian. Peluang kejadian A ditulis $P(A)$.

Definisi 2.1 (Walpole, 1995) Himpunan suatu kemungkinan hasil suatu percobaan disebut ruang contoh dan dilambangkan dengan huruf S.

Definisi 2.2 (Walpole, 1995) Ruang nol atau ruang kosong atau himpunan kosong adalah himpunan bagian ruang sampel atau ruang contoh yang tidak mengandung satu pun anggota. Kejadian seperti ini dinyatakan dengan lambang $\emptyset$.

Dalam menentukan peluang suatu kejadian A, semua bobot titik sampel dalam A dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan *ukuran* A atau peluang A. Jadi ukuran himpunan Ø adalah 0 dan ukuran S adalah 1.

Definisi 2.3 (Walpole, 1995) Peluang suatu kejadian A adalah jumlah peluang semua semua titik contoh dalam A, dengan semikian:

$$0 \le P(A) \le 1,\ P(\emptyset) = 0,\ P(S) = 1.$$

Definisi 2.4 (Bain L.J, 1992) Misalkan A dan B menyatakan dua kejadian dalam koleksi kejadian dalam ruang sampel S, maka peluang bersyarat dari kejadian A bila diberikan kejadian B dinotasikan dengan:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

2.2 Distribusi Peluang

Secara umum dalam statistika dikenal dua macam distibusi yaitu distribusi peluang diskrit dan distribusi peluang kontinu. Distribusi peluang diskrit dapat kita asumsikan hanya terbatas atau tak terbatas dapat dihitung dengan jumlah yang jelas, sedangkan distribusi peluang kontinu tidak memiliki nilai yang pasti.

2.2.1 Distribusi Peluang Diskrit

Definisi 2.5 (Djauhari, 1990) Misalkan A ruang dari variabel random diskrit X dan A terbilang. Fungsi f dari A ke dalam R yang memenuhi:

a. $f(x) \geq 0$ untuk setiap x di A

$b.$ $\sum_{x \text{ di } A} f(x) = 1$

dinamakan fungsi densitas probabilitas (fdp) dari variabel random diskrit X.

Definisi 2.6 (Bain, L.J, 1992) Fungsi distribusi komulatif $F(x)$ dari variabel random diskrit X didefinisikan untuk sembarang bilangan real x oleh

$$F(x) = (X \leq x)$$

2.2.2 Distribusi Peluang Kontinu

Definisi 2.7 (Djauhari, 1990) Misalkan A ruang variabel random kontinu X. Fungsi f dari A ke dalam R yang memenuhi:

a. $f(x) > 0$, untuk semua x di A

$b.$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Definisi 2.8 (Bain, L.J, 1992) Suatu fungsi $f(x)$ yang didefinisikan pada selang nilai variabel random X disebut fungsi densitas probabilitas (fdp kontinu), sehingga fungsi distribusi kumulatifnya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx \quad \text{di mana } x > 0 \qquad (2.1)$$

Definisi 2.9 (Dennis, dkk, 2002) Misalkan *x* adalah variabel acak yang mempunyai fungsi densitas *f*(x), maka ekspektasi dari *x* yang dinotasikan dengan $E(X)$ didefinisikan:

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx \tag{2.2}$$

$E(X)$ disebut juga sebagai nilai rata-rata dari x. Sedangkan variansi dari x dapat ditentukan berdasarkan perumusan secara ekspektasi, yaitu:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{2.3}$$

2.3 Konsep Dasar Distribusi Waktu Hidup

Misalkan variabel random T menunjukkan waktu hidup dari organisme dalam populasi. Waktu hidup T merupakan variabel random kontinu dan non negatif dalam interval $[0, \infty)$. Lawless (1982) menyebutkan bahwa distribusi waktu hidup dapat dinyatakan dengan tiga fungsi yaitu fungsi densitas probabilitas, fungsi selamat, dan fungsi bahaya (*hazard)*.

2.3.1 Fungsi Densitas Probabilitas

Menurut Lawless (1982), fungsi densitas probabilitas adalah probabilitas suatu individu mati atau gagal dalam interval waktu dari t sampai $t + \Delta$ dengan waktu T merupakan variabel random. Fungsi densitas probabilitas dinyatakan dengan:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T < (t + \Delta t))}{\Delta t}\right] \tag{2.4}$$

Waktu hidup merupakan variabel random non negatif, sehingga waktu hidup hanya diukur untuk nilai *t* yang positif, maka diproleh:

$f(t) = 0$ untuk $t < 0$

dan

$$f(t) = \int_0^\infty f(t)dt = 1 \tag{2.5}$$

2.3.2 Fungsi Selamat

Menurut Lawless (1982), fungsi selamat adalah probabilitas suatu individu yang masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t $(t > 0)$. Jika T merupakan variabel random dari waktu hidup suatu individu dalam interval $[0, \infty)$, maka fungsi distribusi komulatif $F(t)$ untuk distribusi kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(t)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$F(t) = P\ (T \leq t)$$

atau

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx, \text{ untuk } t > 0 \tag{2.6}$$

Oleh karena itu diperoleh fungsi selamat yang didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned} S(t) &= P\ (T \geq t) \\ &= 1 - P\ (T \leq t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Jadi, hubungan fungsi densitas probabilitas dengan fungsi selamat adalah:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \leq T < (t + \Delta t))}{\Delta t} \right] = F'(t) = -S'(t) \tag{2.8}$$

Dalam hal ini fungsi selamat *S(t)* merupakan fungsi monoton turun yang mempunyai sifat:

a. $S(0) = 1$, artinya peluang suatu individu bertahan hidup lebih lama dari waktu nol adalah 1.

b. $S(\infty) = 0$, artinya peluang suatu individu bertahan hidup pada waktu yang tak terhingga adalah 0.

2.3.3 Fungsi Bahaya (*Hazard*)

Menurut Lawless (1982), fungsi *hazard* adalah probabilitas suatu individu mati dalam interval waktu dari t sampai $t + \Delta t$, jika diketahui individu tersebut masih dapat bertahan hidup sampai dengan waktu t. Fungsi hazard secara matematika dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t \le T < (t + \Delta t) \mid T \ge t)}{\Delta t}\right] \tag{2.9}$$

Misalkan $f(t)$ adalah fungsi densitas probabilitas pada waktu t, maka dari Persamaan (2.9) diperoleh:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P\big(t \le T < (t + \Delta t)\big) \cap (T \ge t)}{P(T \ge t)\Delta t}\right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P\big(t \le T < (t + \Delta t)\big)}{P(T \ge t)\Delta t}\right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t}\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}\right] \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}\frac{1}{S(t)}\right] \\
&= \frac{F'(t)}{S(t)}
\end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{2.10}$$

Berdasarkan subtitusi dari Persamaan (2.10) terhadap Persamaan (2.8) diperoleh $h(t)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
h(t) &= -\frac{S'(t)}{S(t)} \\
&= -S'(t).\frac{d \ln S(t)}{d\,S(t)} \\
&= -\frac{d\,S(t)}{dt}.\frac{d \ln S(t)}{d\,S(t)}
\end{aligned}$$

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln S(t) \tag{2.11}$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) diperoleh:

$$\int_0^t h(x)dx = \int_0^t -\frac{d}{dx}\ln S(x)dx$$

$$-\int_0^t h(x)dx = \int_0^t \frac{d}{dx}\ln S(x)dx$$

$$-\int_0^t h(x)dx = \ln S(x)\Big|_0^t$$ karena $S(0) = 1$ maka:

$$-\int_0^t h(x)dx = \ln S(x)$$

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(x)\ dx\right] \tag{2.12}$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh hubungan antara $f(t)$, $S(t)$ dan $h(t)$ sebagai berikut:

a. $f(t) = -S'(t)$

b. $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$

c. $S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(x)\ dx\right]$

Dengan demikian jika fungsi *hazard* dari suatu distribusi dalam tahan hidup diketahui, maka $f(t), F(t)$ dan $S(t)$ dapat dicari. Sedangkan fungsi *hazard* kumulatif didefinisikan dengan:

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx \tag{2.13}$$

Berdasarkan persamaan fungsi *hazard* komulatif yang dihubungkan dengan fungsi tahan hidup atau dari Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.12) yang disubtitusikan maka diperoleh:

$$S(t) = exp[-H(t)] \tag{2.14}$$

atau

$$H(t) = -lnS(t)$$

dan berdasarkan subtitusi dari Persamaan (2.14) terhadap Persamaan (2.10) maka diperoleh:

$$h(t) = \frac{f(t)}{\exp[-H(t)]}$$

$$f(t) = h(t) \exp\left[-\int_0^t h(x)\,dx\right] \tag{2.15}$$

2.4 Parameter Campuran

Parameter campuran mendugai proporsi pada sebuah kombinasi distribusi, dengan nilai $0 < p_i < 1$ dimana $i = 1, 2, \dots n$.

W. M. Afify (2011) secara umum memberikan asumsi metode campuran dari:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x) \tag{2.16}$$

dengan $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$

Berdasarkan persamaan tersebut, karena dalam tugas akhir ini menggunakan campuran dua distribusi maka parameter campuran tersebut adalah $p_1 = p$ dan $p_2 = (1 - p)$.

2.5 Distribusi Rayleigh Tunggal

Distribusi Rayleigh tunggal adalah distribusi yang tidak mempunyai campuran, W.M. Afify (2011) memperkenalkan distribusi Rayleigh dengan satu parameter sehingga fungsi densitas probabilitasnya adalah:

$$f(t) = \beta y e^{-\frac{\beta}{2} y^2}; \quad y > 0, \quad \beta > 0 \tag{2.17}$$

Akan ditunjukan apakah fungsi densitas pada Persamaan (2.17) memenuhi sifat distribusi kontinu yaitu:

$$\int_0^\infty f(y)dy = 1$$

sehingga:

$$\int_0^\infty \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy = 1$$

$$\beta \int_0^\infty y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy = 1$$

misalkan:

$$u = \frac{\beta}{2}y^2$$

$$du = \beta y\, dy$$

$$dy = \frac{1}{\beta y} du$$

maka:

$$\beta \int_0^\infty y e^{-u} \frac{1}{\beta y} du = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$$

$$-e^{-u}\Big|_0^\infty = 1$$

$$0 - (-e^0) = 1$$

$$1 = 1$$

Selanjutnya akan ditunjukan fungsi komulatif dari distribusi Rayleigh berdasarkan Persamaan (2.6) sebagai berikut:

$$F(t) = \int_0^t \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2} dy$$

$$= \beta \int_0^t y e^{-\frac{\beta}{2}y^2} dy$$

misalkan:

$$u = \frac{\beta}{2} y^2$$

$$du = \beta y \, dy$$

$$dy = \frac{1}{\beta y} du$$

maka:

$$= \beta \int_0^t y e^{-u} \frac{1}{\beta y} du$$

$$= \int_0^t e^{-u} \, du$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^t$$

$$= -e^{-\frac{\beta}{2} y^2} \Big|_0^t$$

$$= -\left(e^{-\frac{\beta}{2} t^2} - e^0 \right)$$

$$= -(e^{-\frac{\beta}{2} t^2} - 1)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{\beta}{2} t^2} \tag{2.18}$$

dan diperoleh fungsi selamat dari distribusi Rayleigh berdasarkan Persamaan (2.7) yaitu:

$$S(t) = 1 - (1 - e^{-\frac{\beta}{2} t^2})$$

$$= 1 - 1 + e^{-\frac{\beta}{2} t^2}$$

$$S(t) = e^{-\frac{\beta}{2} t^2} \tag{2.19}$$

dan fungsi bahaya berdasarkan Persamaan (2.10) adalah:

$$h(t) = \frac{\beta t e^{-\frac{\beta}{2} t^2}}{e^{-\frac{\beta}{2} t^2}}$$

$$h(t) = \beta t \tag{2.20}$$

Selanjutnya akan ditunjukan rata-rata distribusi Rayleigh pada Persamaan (2.17) berdasarkan persamaan (2.2) sebagai berikut:

$$E(Y) = \int_0^\infty y\, \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \beta y^2 e^{-\frac{\beta}{2}y^2} dy$$

$$= \beta \int_0^\infty y^2 e^{-\frac{\beta}{2}y^2} dy$$

misalkan:

$$u = \frac{\beta}{2}y^2 \qquad du = \beta y\, dy \qquad dy = \frac{1}{\beta y} du$$

$$2u = \beta y^2 \qquad y^2 = \frac{2u}{\beta} \qquad y = \sqrt{\frac{2u}{\beta}}$$

maka:

$$E(Y) = \beta \int_0^\infty \frac{2u}{\beta}\, e^{-u} \frac{1}{\beta y} du$$

$$= \int_0^\infty 2u\, e^{-u} \frac{1}{\beta\sqrt{\frac{2u}{\beta}}} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{\beta}}\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty \sqrt{u}\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty u^{1/2}\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty u^{1/2+1-1}\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$$

$$E(Y) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \tag{2.21}$$

Selanjutnya, variansi distribusi Rayleigh dapat diperoleh dari Persamaan (2.3), terlebih dahulu akan ditunjukan:

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 f(y)dy$$

$$= \int_0^\infty y^2 \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \beta y^3 e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy$$

misalkan:

$$u = \frac{\beta}{2}y^2 \qquad du = \beta y\, dy \qquad dy = \frac{1}{\beta y}du$$

$$2u = \beta y^2 \qquad y^2 = \frac{2u}{\beta} \qquad y = \sqrt{\frac{2u}{\beta}}$$

$$E(Y^2) = \int_0^\infty \beta y^3 e^{-\frac{\beta}{2}y^2}\, dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{2u}{\beta}\beta y e^{-u}\, \frac{1}{\beta y}du$$

$$= \int_0^\infty 2u e^{-u}\, \frac{1}{\beta}du$$

$$= \frac{2}{\beta}\int_{0}^{\infty} ue^{-u}\, du$$

$$= \frac{2}{\beta}\int_{0}^{\infty} u^{1+1-1}e^{-u}\, du$$

$$= \frac{2}{\beta}\big(\Gamma(1+1)\big)$$

$$= \frac{2}{\beta}\big(1\Gamma(1)\big)$$

$$E(Y^2) = \frac{2}{\beta} \qquad (2.22)$$

Berdasarkan Persamaan (2.21) dan (2.22), diperoleh variansi distribusi Rayleigh dengan menggunakan Persamaan (2.3) sebagai berikut:

$$V(Y) = \frac{2}{\beta} - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\right)^2$$

$$= \frac{2}{\beta} - \frac{\pi}{2\beta}$$

$$= \frac{2}{\beta} - \frac{\pi}{2\beta}$$

$$V(Y) = \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{\tau}{4\beta}\right) \qquad (2.23)$$

2.6 Distribusi Rayleigh Dua Campuran

Distribusi campuran adalah distribusi yang dibentuk dari kombinasi dua atau lebih komponen distribusi. Model campuran dua distribusi Rayleigh dapat ditunjukan dengan:

$$F(y) = p_1F_1(y) + p_2F_2(y) \qquad (2.24)$$

dengan $F_1(x)$, $F_2(x)$ diberikan oleh Persamaan (2.24), dimana model yang akan dibentuk akan memiliki tiga parameter, dan fungsi kepadatan atau fungsi densitas probabilitasnya adalah:

$$f(y) = p_1f_1(y) + p_2f_2(y) \qquad (2.25)$$

Sedangkan fungsi selamat dan fungsi bahaya masing-masing:

$$S(y) = p_1S_1(y) + p_2S_2(y) \qquad (2.26)$$

dan

$$h(y) = p_1 h_1(y) + p_2 h_2(y) \tag{2.27}$$

Sedangkan ekspektasi dan variansi dari distribusi campuran Rayleigh adalah:

$$E(Y) = p_1 E_1(Y) + p_2 E_2(Y) \tag{2.28}$$

dan

$$V(Y) = p_1 V_1(Y) + p_2 V_2(Y) \tag{2.29}$$

dengan

$$\sum p_i = 1$$

dengan p_i adalah parameter campuran dengan peluang pada komponen distribusi campuran. Fungsi $f_1(x)$ dan $f_2(x)$ adalah fungsi densitas peluang pada komponen distribusi Rayleigh yang masing-masing satu parameter.

2.7 Metode Estimasi Parameter Distribusi .

Estimator maksimum *likelihood* θ adalah suatu nilai yang akan meminimumkan fungsi *likelihood* $L(\theta)$, sebuah fungsi θ parameter yang tidak diketahui.

Menurut Bain dan Engelhardt (1992), metode maksimum *likelihood* menggunakan nilai dalam ruang parameter Ω yang bersesuaian dengan harga kemungkinan maksimum dari data observasi sebagai estimasi dari parameter yang tidak diketahui.

Dalam aplikasinya $L(\theta)$ menunjukkan fungsi densitas probabilitas bersama dari sampel random. Jika Ω ruang parameter yang merupakan interval terbuka dan $L(\theta)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan serta diasumsikan maksimum pada Ω maka persamaan maksimum *likelihood* adalah:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta) = 0 \tag{2.30}$$

Jika penyelesaian dari Persamaan (2.30) ada, maka maksimum dari $L(\theta)$ dapat terpenuhi. Apabila penyelesaian dari Persamaan (2.30) sukar diselesaikan maka fungsi $L(\theta)$ dapat dibuat logaritma naturalnya, dengan ketentuan memaksimumkan $lnL(\theta)$, sehingga persamaan logaritma natural *likelihood* adalah:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} lnL(\theta) = 0 \qquad (2.31)$$

Definisi 2.10 (Bain, L.J, 1992) Jika fungsi densitas probabilitas bersama dari n variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang diobservasi pada $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinotasikan dengan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. maka fungsi *likelihood* dari himpunan pengamatan $x_1, x_2, \dots, x_n$ dinyatakan sebagai berikut:

$$L(\theta) = f(x^1;\theta)f(x^2;\theta)\dots f(x^n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x^i;\theta) \qquad (2.32)$$

dengan θ parameter yang tidak diketahui.

Dengan memaksimumkan fungsi selanjutnya akan digunakan pendekatan numerik yaitu Newton Rapshon. Metode ini menggunakan iterasi numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier dalam menentukan akar-akar persamaan. Misalnya nilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.33)$$

misalkan a_{ij} turunan parsial dari fungsi f_i terhadap x_j sehingga $a_{ij} = {\partial f_i}/{\partial x_j}$.

Dapat ditunjukan dengan matrik jacobian seperti di bawah ini:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.34)$$

misalkan invers matrik jacobian dinotasikan dengan J^{-1} yang ditunjukan sebagai berikut:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Selanjutnya misalkan ${x_2}^k, {x_2}^k, \ldots, {x_n}^k$ akan dihampiri dengan *k* iterasi, misalkan:

$$\begin{aligned} {f_1}^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ {f_2}^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ {f_n}^k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

dan misalkan ${b_{ij}}^k$ dengan *ij* elemen pada J^{-1} yang memiliki ${x_1}^k, {x_2}^k, {x_2}^k, \ldots, {x_n}^k$, selanjuntnya aproksimasi atau perkiraan diberikan oleh:

$$\begin{aligned} {x_1}^{k+1} &= {x_1}^k - ({b_{11}}^k {f_1}^k + {b_{12}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{1n}}^{k+1} {f_n}^k \\ {x_2}^{k+1} &= {x_2}^k - ({b_{21}}^k {f_1}^k + {b_{22}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{2n}}^{k+1} {f_n}^k \\ &\vdots \\ {x_n}^{k+1} &= {x_n}^k - ({b_{n1}}^k {f_1}^k + {b_{n2}}^k {f_2}^k + \cdots + {b_{nn}}^{k+1} {f_n}^k. \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.8 Akaike's Information Criterion (AIC)

Dalam penentuan suatu distribusi terbaik, maka digunakan suatu metode *Akaike's Information Criterion* (AIC). Rumus AIC untuk jumlah parameter sebanyak *P* adalah sebagai berikut:

$$AIC = l(b) - 2P \tag{2.38}$$

dimana:

$l(b) =$ log likelihood

$P =$ Banyaknya parameter

Menurut Chiu et. Al (2001) AIC menghasilkan penduga awal yang baik adalah distribusi yang memiliki nilai AIC yang lebih besar.

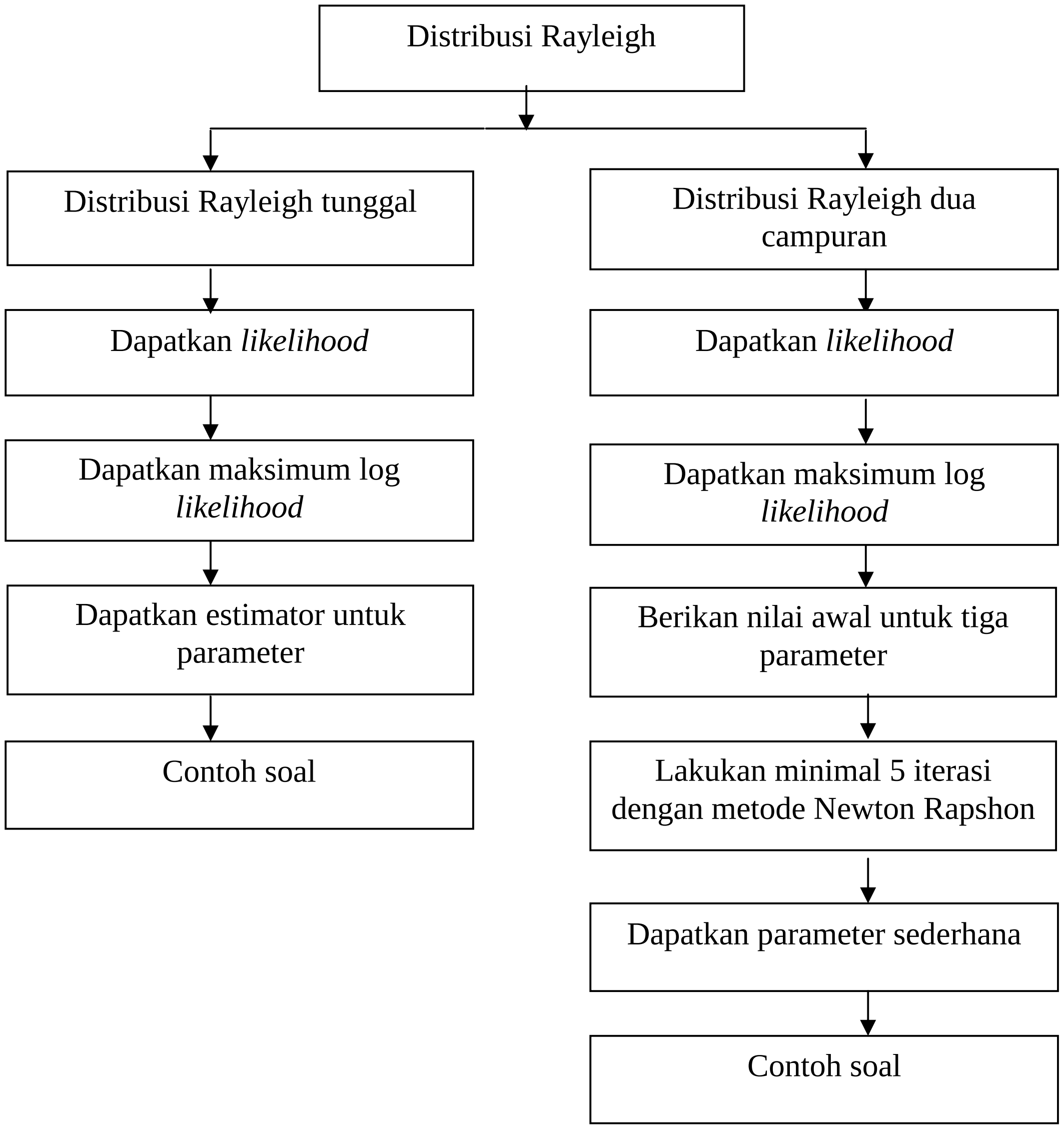
BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penyusunan tugas akhir ini penulis mengambil objek penelitian mengenai distribusi kontinu yaitu distribusi Rayleigh dengan satu parameter yang dinamakan distribusi Rayleigh tunggal. Selanjutnya penulis menggabungkan dua distribusi yang sama-sama berdistribusi Rayleigh yang mempunyai satu parameter sehingga membentuk campuran dengan tiga parameter, di mana parameter campuran yang digunakan adalah p, β_1 dan β_2. Berdasarkan dua distribusi tersebut yaitu distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran maka dapatkan estimator untuk parameternya. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

a. Distribusi Rayleigh Tunggal
   1. Menentukan fungsi *Likelihood.*
   2. Tentukan logaritma natural dari fungsi *likelihood.*
   3. Turunkan persamaan logaritma natural dari fungsi *likelihood* terhadap parameter yang digunakan.
   4. Dapatkan estimator untuk parameter yang digunakann dengan membuat turunanan dari persamaan logaritma natural sama dengan nol.

b. Distribusi Rayleigh Dua Campuran
   1. Menentukan fungsi *Likelihood.*
   2. Tentukan logaritma natural dari fungsi *likelihood.*
   3. Berikan nilai awal untuk tiga parameter yaitu p, β_1 dan β_2.
   4. Lakukan iterasi dengan memanfaatkan metode Numerik yaitu metode Newton Rhapson.
   5. Dapatkan parameter sederhana minimal dengan melakukan 5 iterasi.

Penelitian yang dilakukan tidak menggunakan data primer, penelitian ini hanya menggunakan data skunder. Data digunakan sebagai contoh aplikasi dari teori yang dikembangkan dari teori ini. Pengembangan data dilakukan dengan menguji keberhasilan metoda yang digunakan untuk mengestimasi parameter. Berikut adalah *flowchart* metodologi penelitian dari tugas akhir:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

4.1 Estimasi Parameter Distribusi Rayleigh Tunggal

Dalam memudahkan untuk mempelajari atau mengetahui karakteristik dari populasi, sering terjadi pengambilan sampel dan untuk mendapatkan penaksir yang baik dari suatu populasi, dapat dilihat hubungan fungsional antara variabel-variabel yang mempengaruhi data sampel. Hubungan fungsional ini digambarkan dengan fungsi matematika, yaitu fungsi distribusi. Oleh karena itu dalam tugas akhir ini penulis memilih distribusi probabilitas kontinu untuk menggambarkan uji waktu hidup yang akan ditaksir parameternya dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*. Fungsi distribusi probabilitas dari distribusi Rayleigh adalah sebagai berikut:

$$f(y) = \beta y e^{-\frac{\beta}{2}y^2}$$

Jika $y_1, y_2, \dots, y_n$, adalah sampel acak dari fungsi kepadatan peluang, maka fungsi *likelihood* dari distribusi Rayleigh tunggal adalah:

$$L = f(y_1).f(y_2)\dots f(y_n)$$

$$L = \beta y_1 e^{-\frac{\beta}{2}{y_1}^2} . \beta y_2 e^{-\frac{\beta}{2}{y_2}^2} \dots \beta y_n e^{-\frac{\beta}{2}{y_n}^2}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \beta^n y_i e^{-\frac{\beta}{2}\sum {y_i}^2} \tag{4.1}$$

Kemudian dari Persamaan (4.1) didapat logaritma natural dari fungsi *likelihood* yang ditunjukan sebagai berikut:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + \ln \beta^n + \ln e^{-\frac{\beta}{2}\sum {y_i}^2}$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i + n \ln \beta - \frac{\beta}{2} \sum {y_i}^2 \tag{4.2}$$

untuk mendapatkan penaksiran terhadap β, maka persamaan (4.2) diturunkan terhadap β dengan ketentuan memaksimumkan lnL, sehingga persamaan logaritma nanural *likelihood* adalah:

$$\frac{\partial \ln L}{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^{n} \ln y_i + n \ln \beta - \frac{\beta}{2} \sum y_i^2 \right)}{\beta} = 0$$

$$\frac{n}{\beta} - \frac{1}{2} \sum y_i^2 = 0$$

$$\frac{n}{\beta} = \frac{1}{2} \sum y_i^2$$

$$\beta = \frac{2n}{\sum y_i^2} \qquad (4.3)$$

4.2 Distribusi Rayleigh Dua Campuran

Berdasarkan subtitusi Persamaan (2.24) terhadap (2.18) maka fungsi komulatif distribusi Rayleigh untuk populasi campuran dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(y) = p\left(1 - e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) + (1 - p)\left(1 - e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right) \qquad (4.4)$$

fungsi densitas populasi campuran adalah:

$$f(y) = p\left(\beta_1 y e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) + (1 - p)\left(\beta_2 y e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right) \qquad (4.5)$$

Suatu distribusi dikatakan kontinu apabila memenuhi syarat $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = 1$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa distribusi campuran Rayleigh pada persamaan (2.16) memenuhi syarat distribusi peluang, sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

yang mana,

$$f(y) = p\left(\beta_1 y e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right)$$

karena fungsi tahan hidup merupakan variabel random non negatif maka:

$$f(y) = \int_0^\infty p\left(\beta_1 y e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right) dy$$

$$f(y) = \int_0^\infty p\left(\beta_1 y e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) dy + \int_0^\infty (1-p)\left(\beta_2 y e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right) dy$$

$$f(y) = p\int_0^\infty \left(\beta_1 y e^{-\frac{\beta_1}{2}y^2}\right) dy + (1-p)\int_0^\infty \left(\beta_2 y e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2}\right) dy$$

$$f(y) = p(1) + (1-p)(1)$$

$$f(y) = p + 1 - p$$

$$f(y) = 1$$

sedangkan fungsi selamat dan fungsi bahaya, berdasarkan subtitusi Persamaan (2.26) terhadap Persamaan (2.19) dan subtitusi Persamaan (2.27) terhadap Persamaan (2.20) masing-masing:

$$S(y) = pe^{-\frac{\beta_1}{2}y^2} + (1-p)e^{-\frac{\beta_2}{2}y^2} \tag{4.6}$$

dan

$$h(y) = p\beta t + (1-p)\beta t \tag{4.7}$$

Selanjutnya ekspektasi dan variansi dari distribusi campuran Rayleigh, berdasarkan subtitusi Persamaan (2.28) terhadap Persamaan (2.21) dan subtitusi Persamaan (2.29) terhadap Persamaan (2.23) masing-masing:

$$E(Y) = p\sqrt{\frac{\pi}{2\beta_1}} + (1-p)\sqrt{\frac{\pi}{2\beta_2}} \tag{4.8}$$

dan

$$V(Y) = p\frac{\beta_1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4\beta_1}\right) + (1 - p)\frac{\beta_2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4\beta_2}\right) \tag{4.9}$$

4.3 Nilai Awal Parameter Distribusi Rayleigh dua Campuran

Nilai awal dari suatu parameter campuran dapat dicari dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*, yakni memaksimumkan perkalian fungsi densitas distribusi campuran Rayleigh. Dapat ditunjukan sebagai berikut:

$$L = f(y_1).f(y_2)\dots f(y_n)$$

sehingga *likelihood:*

$$\begin{aligned} L = &\left(p\left(\beta_1 y_1 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_1}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_1 e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_1}^2}\right)\right) \\ &\left(p\left(\beta_1 y_2 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_2}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_2 e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_2}^2}\right)\right)\dots \\ &\left(p\left(\beta_1 y_n e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_n}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_n e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_n}^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kemudian dari Persamaan (4.10) didapat logaritma natural dari fungsi *likelihood* yang ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ln L = &\ln\left(p\left(\beta_1 y_1 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_1}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_1 e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_1}^2}\right)\right) + \\ &\ln\left(p\left(\beta_1 y_2 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_2}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_2 e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_2}^2}\right)\right) + \dots + \\ &\ln\left(p\left(\beta_1 y_n e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_n}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_n e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_n}^2}\right)\right) \\ = &\sum_{i=1}^{n} \ln\left(p\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Selanjutnya dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* dari persamaan (4.11) maka:

1. $$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\frac{\partial f_1}{\partial p}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right) \qquad (4.12)$$

2. $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right)}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right) \qquad (4.13)$$

3. $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(1-p) e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_2 y_i^3\right)}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right) \qquad (4.14)$$

Selanjutnya nilai awal dari distribusi campuran Rayleigh diperoleh dengan menggunakan matrik Jacobian (*J*). Matrik *J* adalah matrik Jacobian dari distribusi campuran Rayleigh yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

sehingga:

1. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.12) terhadap *p* sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}\right)$$

2. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.12) terhadap β_1 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \frac{1}{2}\beta_1 y_i{}^3 e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right.$$

$$-\frac{\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}$$

$$\left.\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \frac{1}{2}\beta_1 y_i{}^3 e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}\right)\right)$$

3. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.12) terhadap β_2 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2} + \frac{1}{2}\beta_2 y_i{}^3 e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right.$$

$$-\frac{\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}$$

$$\left((1-p)y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2} - \frac{1}{2}(1-p)\beta_2 y_i^3 e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)\Bigg)$$

4. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.13) terhadap *p* sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right) e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}} \right.$$

$$- \frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right) e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} p}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}$$

$$\left. \left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right) \right)$$

5. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.13) terhadap β_1 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i^3 e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} p}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}} \right.$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right) y_i^2 e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} p}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}$$

$$- \frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right) e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} p}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}$$

$$\left(py_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \frac{1}{2}p\beta_1 y_i^3 e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}\right)\Bigg)$$

6. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.13) terhadap β_2 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_1 y_i^3\right)e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2}p}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}\right.$$

$$\left.\left((1-p)y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2} - \frac{1}{2}(1-p)\beta_2 y_i^3 e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)\right)$$

7. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.14) terhadap *p* sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_3}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\left(-y_i + \frac{1}{2}\beta_2 y_i^3\right)e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}\right.$$

$$- \frac{\left(\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_2 y_i^3\right)(1-p)\right)e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)^2}$$

$$\left.\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i^2} - \beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i^2}\right)\right)$$

8. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.14) terhadap β_1 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\left(\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_2 {y_i}^3\right)(1-p)\right)e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}\right)^2}\right.$$

$$\left.\left(y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2} - \frac{1}{2}p\beta_1 {y_i}^3 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2}\right)\right)$$

9. Akan ditunjukan turunan dari Persamaan (4.14) terhadap β_2 sebagai berikut:

$$\frac{\partial f_3}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\frac{1}{2}\left({y_i}^3(1-p)e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}\right)}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}}\right.$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_2 {y_i}^3\right)(1-p)\right)\left({y_i}^2 e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2}\right)}{p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}}$$

$$-\frac{\left(\left(y_i - \frac{1}{2}\beta_2 {y_i}^3\right)(1-p)\right)e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2}}{\left(p\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}{y_i}^2} + (1-p)\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}\right)^2}$$

$$\left.\left((1-p)y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2} - \frac{1}{2}(1-p)\beta_2 {y_i}^3 e^{-\frac{\beta_2}{2}{y_i}^2}\right)\right)$$

4.4 Aplikasi

Selanjutnya akan ditentukan nilai awal dari masing parameter β dengan menggunakan data daya hidup dari 40 komponen elektronik sebagai berikut:

Tabel 4.1 Daya Hidup dari 40 Komponen Elektronik

No	[illegible]	No	[illegible]
1	0,11	21	6,52
2	1,48	22	6,60
3	1,82	23	6,65
4	3,02	24	6,71
5	3,46	25	6,93
6	3,76	26	6,95
7	4,02	27	6,99
8	4,09	28	7,06
9	4,18	29	7,13
10	4,24	30	7,19
11	4,27	31	7,65
12	4,39	32	7,78
13	4,92	33	7,85
14	5,17	34	7,87
15	5,25	35	8,46
16	5,47	36	8,49
17	6,06	37	8,59
18	6,09	38	8,81
19	6,16	39	8,09
20	6,46	40	8,92

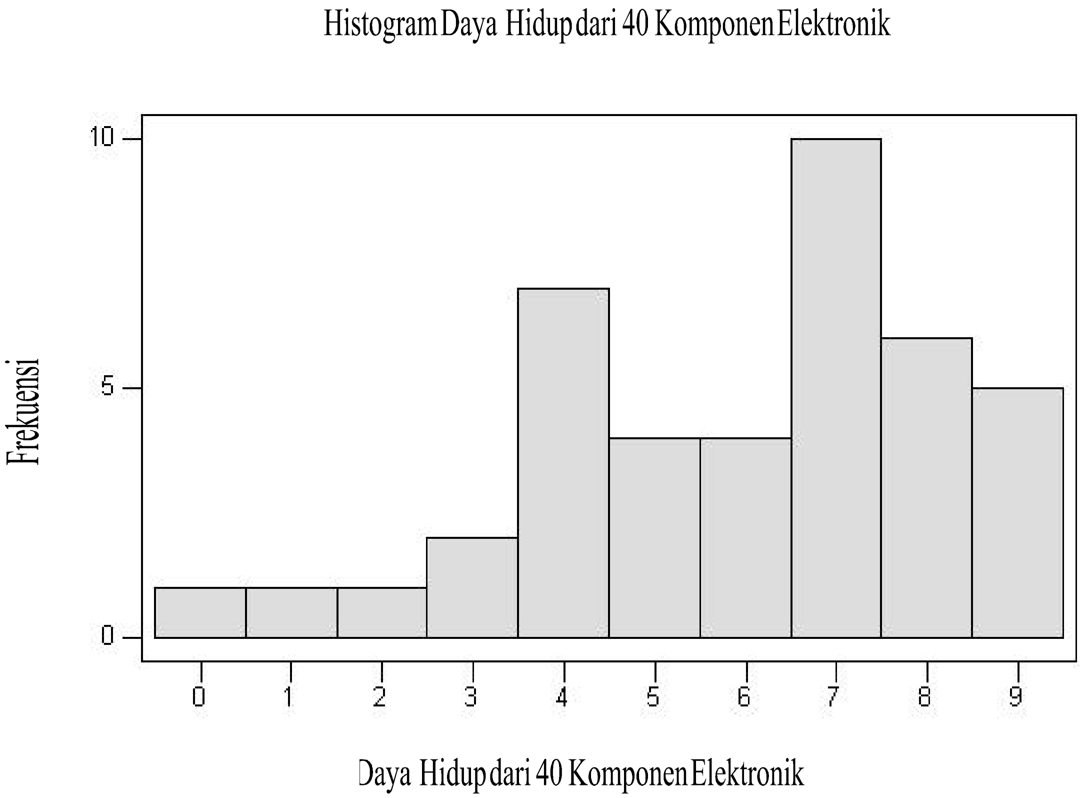
Berdasarkan data tersebut dilakukan estimasi parameter distribusi dari data dalam fungsi tahan hidup yang diasumsikan berdistribusi Rayleigh. Berdasarkan tabel 4.1 maka:

$$\beta = \frac{2\,n}{\sum y_i^2}$$

$$= \frac{2(40)}{(0{,}11)^2 + (0{,}48)^2 + \cdots + (5{,}92)^2}$$

$$= 0{,}051$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai awal dari distribusi campuran masing-masing parameternya yaitu p, β_1, β_2 dengan menggunakan data daya hidup dari 40 komponen elektronik. Dari data pada Tebel 4.1 akan dibagi ke dalam dua kelompok sehingga dari 40 data dengan menggunakan program Minitab di dapat nilai *p* sebagai berikut:



Gambar 4.1 Kurva Normal

Berdasarkan kurva maka telihat bahwa data tersebut terbagi dua kelompok dengan $p = p_1 = 0{,}6$ dan untuk $1 - p = p_2 = 0{,}4$

Tabel 4.2 Daya Hidup dari 24 Komponen Elektronik

No	*Y*
1	0,11
2	1,48
3	1,82
4	3,02
5	3,46
6	3,76
7	4,02
8	4,09
9	4,18
10	4,24
11	4,27
12	4,39
13	4,92
14	5,17
15	5,25
16	5,47
17	6,06
18	6,09
19	6,16
20	6,46
21	6,52
22	6,60
23	6,65
24	6,71

Tabel 4.3 Daya Hidup dari 16 Komponen Elektronik

No	Y
1	6,93
2	6,95
3	6,99
4	7,06
5	7,13
6	7,19
7	7,65
8	7,78
9	7,85
10	7,87
11	8,46
12	8,49
13	8,59
14	8,81
15	8,09
16	8,92

Kelompok data pertama pada Tebel 4.2 digunakan untuk distribusi Rayleigh untuk parameter β_1 sebagai berikut:

$$\beta_1 = \frac{2\,n}{\sum y_i^2}$$

$$= \frac{2(24)}{(0{,}11)^2 + (1{,}48)^2 + \cdots + (6{,}71)^2}$$

$$= 0{,}082$$

Kelompok data kedua pada Tabel 4.3 digunakan untuk distribusi Rayleigh untuk parameter β_2 sebagai berikut:

$$\beta_2 = \frac{2\,n}{\sum y_i^2}$$

$$= \frac{2(16)}{(6{,}93)^2 + (1{,}95)^2 + \cdots + (8{,}92)^2}$$

$$= 0{,}032$$

Sehingga diperoleh nilai awal untuk:

$$p^0 = 0{,}6\ , \beta_1{}^0 = 0{,}082\ , \beta_2{}^0 = 0{,}032$$

Selanjutnya masukkan nilai awal di atas ke Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) maka diperoleh:

$$f_1{}^0 = 22{,}142\ , f_2{}^0 = -402{,}924\ , f_3{}^0 = 916{,}281$$

Nilai awal yang telah diperoleh selanjutnya akan dimasukan ke dalam matrik J seperti Persamaan (4.15) yang digunakan untuk menentukan akar persamaan dari data tersebut, dapat ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -670.992 & -76861.923 & 468.881 \\ 1.2358277910^{5} & -3.0266242010^{5} & 67717.610 \\ -5112.414 & -3.9738986910^{5} & -76290.632 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0.00006619412429 & 0.000008009622360 & 0.000006702727487 \\ -0.00001202336699 & -7.09427253710^{-8} & -1.36866085310^{-7} \\ 0.00006706427598 & -1.67210374510^{-7} & -0.00001284401369 \end{bmatrix}$$

yang mana J^{-1} merupakan nilai dari *b*.

- **Iterasi pertama** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p^1 &= p^0 - \left(b_{11}{}^0 f_1{}^0 + b_{12}{}^0 f_2{}^0 + b_{13}{}^0 f_3{}^0\right) \\ &= 0{,}6 - (-0{,}00006619412429)(22{,}142) + \\ &\quad (0{,}000008009622360)(\,-402{,}924) + \\ &\quad (0{,}000006702727487)(\,916{,}281)) \\ &= 0{,}598 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1{}^1 &= \beta_1{}^0 - \left(b_{21}{}^0 f_1{}^0 + b_{22}{}^0 f_2{}^0 + b_{23}{}^0 f_2{}^0\right) \\
&= 0{,}082 - ((-0{,}00001202336699)(22{,}142) + \\
&\quad (-0{,}00000007094272537)(-402{,}924) + \\
&\quad (-0{,}00000013686608573)(916{,}281)) \\
&= 0{,}054 \\
\beta_2{}^1 &= \beta_2{}^0 - \left(b_{31}{}^0 f_1{}^0 + b_{32}{}^0 f_2{}^0 + b_{33}{}^0 f_2{}^0\right) \\
&= 0{,}032 - ((0{,}00006706427598)(22{,}142) + \\
&\quad (-0{,}000000672103745)(-402{,}924) + \\
&\quad (-0{,}0000128440136)(38{,}708)) \\
&= 0{,}042
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dari iterasi pertama masukan nilai di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diperoleh:

$$f_1{}^1 = -10{,}020, \quad f_2{}^1 = -717{,}326, \quad f_3{}^1 = -137{,}954$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^1, \beta_1{}^1, \beta_2{}^1$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -44.182 & 7665.505 & -836.736 \\ 19183.674 & -33222.143 & -60035.900 \\ -25235.600 & -82574.169 & -85898.520 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0.00007979051337 & 0.00002759517052 & -0.00001850948424 \\ 0.0001199652576 & -6.56943958110^{-7} & -7.09430476710^{-7} \\ -0.00009188132667 & -0.000007475496476 & -0.000005521881258 \end{bmatrix}$$

- **Iterasi kedua** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
p^2 &= p^1 - \left(b_{11}{}^1 f_1{}^1 + b_{12}{}^1 f_2{}^1 + b_{13}{}^1 f_3{}^1\right)\\
&= 0{,}598 - ((-0{,}0000797905133)(-10{,}020) +\\
&\quad (0{,}00002759517052)(\,-717{,}326) +\\
&\quad (-0{,}0000185094842)(\,26{,}815))\\
&= \ 0{,}614
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1{}^2 &= \beta_1{}^1 - \left(b_{21}{}^1 f_1{}^1 + b_{22}{}^1 f_2{}^1 + b_{23}{}^1 f_2{}^1\right)\\
&= 0{,}054 - ((0{,}0001199652576)(-10{,}020) +\\
&\quad (-0{,}0000006569439581)(-717{,}326) +\\
&\quad (-0{,}0000007094304767)(-137{,}954))\\
&= \ 0{,}055
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2{}^2 &= \beta_2{}^1 - \left(b_{31}{}^1 f_1{}^1 + b_{32}{}^1 f_2{}^1 + b_{33}{}^1 f_2{}^1\right)\\
&= 0{,}042 - ((-0{,}0000918813266)(-10{,}020) +\\
&\quad (-0{,}00000747549647)(-717{,}326) +\\
&\quad (-0{,}00000552188125)(26{,}815)\\
&= \ 0{,}035
\end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan iterasi kedua masukan nilai awal di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diproleh:

$$f_1{}^2 = -15{,}830, f_2{}^2 = -843{,}449\ , f_3{}^2 = 70{,}738$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^2, \beta_1{}^2, \beta_2{}^2$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -117.254 & 4671.605 & -491.422 \\ 34979.062 & -66613.053 & -60860.700 \\ -23541.130 & -1.3171704010^5 & 3.4393487910^5 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0007217892204 \; 0.00003598798675 \; 0.000007399532070 \\ 0.00024733677370.000001211184674 \;\; 5.67724563610^{-7} \\ 0.00014412670710.0000029270992740.000003631421010 \end{bmatrix}$$

- **Iterasi ketiga** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$p^3 = p^2 - \left({b_{11}}^2{f_1}^2 + {b_{12}}^2{f_2}^2 + {b_{13}}^2{f_3}^2\right)$$
$$= 0{,}614 - ((0{,}0007217892204)(-15{,}830) +$$
$$(0{,}00003598798675)(\,-843{,}449) +$$
$$(0{,}000007399532070)(\,70{,}738))$$
$$= \; 0{,}655$$

$${\beta_1}^3 = {\beta_1}^2 - \left({b_{21}}^2{f_1}^2 + {b_{22}}^2{f_2}^2 + {b_{23}}^2{f_2}^2\right)$$
$$= 0{,}055 - ((0{,}0002473367737)(-15{,}830) +$$
$$(0{,}000001211184674)(-843{,}449) +$$
$$(0{,}0000005677245636)(70{,}738))$$
$$= \; 0{,}059$$

$${\beta_2}^3 = {\beta_2}^2 - \left({b_{31}}^2{f_1}^2 + {b_{32}}^2{f_2}^2 + {b_{33}}^2{f_2}^2\right)$$
$$= 0{,}035 - ((0{,}0001441267071)(-15{,}830) +$$
$$(0{,}000002927099274)(-843{,}449) +$$
$$(0{,}000003631421010)(70{,}738)$$
$$= \; 0{,}039$$

Selanjutnya berdasarkan iterasi ketiga masukan nilai awal di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diproleh:

$${f_1}^3 = -14{,}648, {f_2}^3 = -673{,}757, {f_3}^3 = -39{,}935$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^3, {\beta_1}^3, {\beta_2}^3$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -66.376 & 4534.1456 & -921.473 \\ 17744.812 & 910.252 & -31704.100 \\ -17274.350 & -51020.886 & -13537.291 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0003621711931 & 0.00002408582683 & -0.00003175587249 \\ 0.0001750721834 & -0.000003337368925 & -0.000004100969090 \\ -0.0001976810548 & -0.00001815662257 & -0.00001789153145 \end{bmatrix}$$

- **Iterasi keempat** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p^4 &= p^3 - \left({b_{11}}^3 {f_1}^3 + {b_{12}}^3 {f_2}^3 + {b_{13}}^3 {f_3}^3\right) \\ &= 0{,}655 - ((-0{,}000362171193)(-14{,}648) + \\ &\quad (0{,}00002408582683)(-673{,}757) + \\ &\quad (-0{,}0000317558724)(-39{,}935)) \\ &= 0{,}665 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\beta_1}^4 &= {\beta_1}^3 - \left({b_{21}}^3 {f_1}^3 + {b_{22}}^3 {f_2}^3 + {b_{23}}^3 {f_2}^3\right) \\ &= 0{,}059 - ((0{,}0001750721834)(-14{,}648) + \\ &\quad (-0{,}00000333736892)(-673{,}757) + \\ &\quad (-0{,}00000410096909)(-39{,}935)) \\ &= 0{,}060 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\beta_2}^4 &= {\beta_2}^3 - \left({b_{31}}^3 {f_1}^3 + {b_{32}}^3 {f_2}^3 + {b_{33}}^3 {f_2}^3\right) \\ &= 0{,}039 - ((-0{,}000197681054)(-14{,}648) + \\ &\quad (-0{,}0000181566225)(-673{,}757) + \\ &\quad (-0{,}0000178915314)(-39{,}935) \\ &= 0{,}023 \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan iterasi keempat masukan nilai awal di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diproleh:

$${f_1}^4 = -7{,}834,\ {f_2}^4 = -52{,}977,\ {f_3}^4 = -144{,}427$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^4, {\beta_1}^4, {\beta_2}^4$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -4.984 & -815.677 & 376.724 \\ -246.857 & -10249.240 & -741.946 \\ 1392.106 & -547.382 & -3414.698 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.005099300429 & -0.0004409863700 & 0.0006583940741 \\ -0.0002765187201 & -0.00007480043564 & -0.00001425407292 \\ 0.002123212095 & -0.0001677909319 & -0.00002215224773 \end{bmatrix}$$

- **Iterasi kelima** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p^5 &= p^4 - \left({b_{11}}^4{f_1}^4 + {b_{12}}^4{f_2}^4 + {b_{13}}^4{f_3}^4\right) \\ &= 0{,}665 - ((0{,}005099300429)(-7{,}834) + \\ &\quad (-0{,}000440986370)(-52{,}977) + \\ &\quad (0{,}0006583940741)(-144{,}427)) \\ &= 0{,}777 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\beta_1}^5 &= {\beta_1}^4 - \left({b_{21}}^4{f_1}^4 + {b_{22}}^4{f_2}^4 + {b_{23}}^4{f_2}^4\right) \\ &= 0{,}060 - ((-0{,}000276518720)(-7{,}834) + \\ &\quad (-0{,}0000748004356)(-52{,}977) + \\ &\quad (-0{,}0000142540729)(-144{,}427)) \\ &= 0{,}052 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {\beta_2}^5 &= {\beta_2}^4 - \left({b_{31}}^4{f_1}^4 + {b_{32}}^4{f_2}^4 + {b_{33}}^4{f_2}^4\right) \\ &= 0{,}023 - ((0{,}002123212095)(-7{,}834) + \\ &\quad (-0{,}000167790931)(-52{,}977) + \\ &\quad (-0{,}0000221522477)(-144{,}427) \\ &= 0{,}028 \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan iterasi kelima masukan nilai awal di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diproleh:

$$f_1{}^5 = 5.264,\ f_2{}^5 = -53.883,\ f_3{}^5 = 13.556$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^5, \beta_1{}^5, \beta_2{}^5$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 7.91519 & -1.39991674710^{5} & -35460.9389 \\ -95.8766 & 1.01671740500010^{8} & 11167.1241 \\ -1356.006 & -47400.0980 & -7.568998899010^{6} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.007075359789 & 0.00009726605567 & -0.0003313387759 \\ 6.81130288910^{-8} & 9.92921750210^{-9} & -3.04461816310^{-10} \\ -0.00001267611914 & -1.74876496510^{-8} & -7.27557511310^{-8} \end{bmatrix}$$

- **Iterasi keenam** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p^6 &= p^5 - \left(b_{11}{}^5 f_1{}^5 + b_{12}{}^5 f_2{}^5 + b_{13}{}^5 f_3{}^5\right) \\ &= 0.777 - ((0.007075359789)(5.264) + \\ &\quad (0.00009726605567)(-53.883) + \\ &\quad (-0.0003313387759)(13.556)) \\ &= 0{,}749 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1{}^6 &= \beta_1{}^5 - \left(b_{21}{}^5 f_1{}^5 + b_{22}{}^5 f_2{}^5 + b_{23}{}^5 f_2{}^5\right) \\ &= 0{,}052 - ((0{,}00000006811302889)(5{,}264) + \\ &\quad (0{,}0000000009929217502)(-53{,}883) + \\ &\quad (-0{,}0000000003044618163)(13{,}556)) \\ &= 0{,}053 \end{aligned}$$

$$\beta_2{}^6 = \beta_2{}^5 - \left(b_{31}{}^5 f_1{}^5 + b_{32}{}^5 f_2{}^5 + b_{33}{}^5 f_2{}^5\right)$$

$$= 0{,}028 - ((-0.00001267611914)(5.264) +$$
$$(-0{,}0000000001748764965)(-53.883) +$$
$$(-0{,}0000007275575113)(13.556))$$
$$= 0{,}028$$

Selanjutnya berdasarkan iterasi kelima masukan nilai awal di atas ke dalam Persamaan (4.12) sampai Persamaan (4.14) sehingga diproleh:

$$f_1{}^6 = 2.698,\ f_2{}^6 = -73.8828,\ f_3{}^6 = 7.601$$

dan diperoleh juga nilai matrik Jacobian pada Persamaan (4.15) dengan memasukan nilai $p^6, \beta_1{}^6, \beta_2{}^6$ yang akan ditunjukan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} 10.97209561 & -1.74390457910^{5} & -38735.58507 \\ -160.0754954 & 4.18209797410^{7} & -1760.534 \\ 9060.872 & -1.23456490710^{6} & -2.568931800910^{6} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -0.007919447009 & -0.00002949781837 & 0.0001194334334 \\ -3.14880035310^{-7} & 2.37936755510^{-5} & 4.58484987510^{-10} \\ -0.00002791752651 & -1.15476321110^{-7} & 3.17661303310^{-8} \end{bmatrix}$$

- **Iterasi ketujuh** berdasarkan Persamaan (2.33) ditunjukan sebagai berikut:

$$p^7 = p^6 - \left(b_{11}{}^6 f_1{}^6 + b_{12}{}^6 f_2{}^6 + b_{13}{}^6 f_3{}^6\right)$$

$$= 0{,}749 - ((-0{,}007919447009)(2{,}698) +$$
$$(-0{,}00002949781837)(-73{,}8828) +$$
$$(0{,}0001194334334)(7{,}601))$$
$$= 0{,}767$$

$$\beta_1{}^7 = \beta_1{}^6 - \left(b_{21}{}^6 f_1{}^6 + b_{22}{}^6 f_2{}^6 + b_{23}{}^6 f_2{}^6\right)$$
$$= 0{,}053 - ((-0{,}0000003148800353)(2{,}698) + (0{,}00002379367555)(-73{,}8828) + (0{,}0000000004584849875)(7{,}601))$$
$$= 0{,}055$$

$$\beta_2{}^7 = \beta_2{}^6 - \left(b_{31}{}^6 f_1{}^6 + b_{32}{}^6 f_2{}^6 + b_{33}{}^6 f_2{}^6\right)$$
$$= 0{,}028 - ((-0{,}0002791752651)(2{,}698) + (-0{,}0000001154763211)(-73.8828) + (0{,}00000003176613033)(7.601))$$
$$= 0.027$$

Ulangi kembali sampai *k* iterasi sehingga nilai $f_1{}^k,\ f_2{}^k, f_3{}^k \approx 0$

4.5 Perbandingan Dua Distribusi

Berdasarkan kedua distribusi tersebut yaitu distribusi Rayleigh tanpa campuran atau distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran, untuk menentukan mana yang terbaik maka di sini penulis menggunakan rumus AIC (*Akaike's Information Criterion*) sebagai berikut:

- **Distrribusi Rayleigh tanpa campuran**

$$L(b) = \sum_{i=1}^{n} ln\, y_i + n\, ln\beta - \frac{\beta}{2}\sum y_i{}^2$$
$$= l\,n(236{,}47) + 40\ln(0{,}051) - \frac{0{,}051}{2}(1577{,}819)\mathrm{l}$$
$$= -89{,}558$$

Berdasarkan Persamaan (2.34) yaitu:

$$AIC \; = L(b) - 2P$$
$$= -89{,}558 - 2(1)$$
$$= -89{,}558 - 2$$
$$= -91{,}558$$

- **Campuran Dua Distrribusi Rayleigh**

$$L(b) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(p\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i{}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i{}^2}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ln\left(0,6\left(0.082 y_i e^{-\frac{0.082}{2}y_i{}^2}\right) + (0,4)\left(0,032 y_i e^{-\frac{0,032}{2}y_i{}^2}\right)\right)$$

$$= -27,673$$

Berdasarkan Persamaan (2.34) yaitu:

$$AIC = L(b) - 2P$$

$$= -27,673 - 2(3)$$

$$= -27,673 - 6$$

$$= -33,673$$

Berdasarkan **iterasi ketujuh** :

$$L(b) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(p\left(\beta_1 y_i e^{-\frac{\beta_1}{2}y_i{}^2}\right) + (1-p)\left(\beta_2 y_i e^{-\frac{\beta_2}{2}y_i{}^2}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} ln\left(0,767\left(0.055 e^{-\frac{0.058}{2}y_i{}^2}\right)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} ln\left((0,233)\left(0,027 y_i e^{-\frac{0,028}{2}y_i{}^2}\right)\right)$$

$$= -23,615$$

Berdasarkan Persamaan (2.34) yaitu:

$$AIC = L(b) - 2P$$

$$= -27,673 - 2(3)$$

$$= -23,615 - 6$$

$$= -17,615$$

Jadi, diantara dua distribusi tersebut yaitu distribusi tanpa campuran dan distribusi campuran maka distribusi yang terbaik adalah distribusi campuran.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Distribusi Rayleigh tunggal merupakan distribusi yang tidak memiliki campuran. Untuk mengestimasi nilai parameter tersebut yaitu dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*. Rumus parameter dari distribusi Rayleigh tunggal adalah:

$$\beta = \frac{2n}{\sum y_i^2}.$$

Berdasarkan data Daya Hidup Dari 40 Komponen Elektronik menghasilkan nilai parameter yang berdistribusi Rayleigh tunggal adalah $\beta = 0{,}051$.

Sedangkan distribusi Rayleigh dua campuran merupakan kombinasi dari dua distribusi Rayleigh, dengan parameter campuran adalah p, β_1, β_2. Berdasarkan estimasi maksimum *likelihood*, diperoleh nilai awal masing-masing parameter dengan memanfaatkan metode Numerik yaitu metode Newton Rhapson untuk penyelesaiannya. Aplikasi Daya Hidup Dari 40 Komponen Elektronik menghasilkan nilai awal masing-masing paremeter dari distribusi Rayleigh dua campuran berdasarkan itersai kelima adalah:

$$p^5 = 0{,}777,\ \beta_1{}^5 = 0{,}052\ ,\ \beta_2{}^5 = 0{,}028.$$

Selanjutnya dengan menggunakan rumus AIC, diantara dua distribusi tersebut yaitu distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran maka distribusi yang terbaik adalah distribusi Rayleigh dua campuran.

5.2 Saran

Penelitian ini membahas tentang distribusi Rayleigh tunggal dan distribusi Rayleigh dua campuran, di mana distribusi Rayleigh tunggal tersebut memiliki satu parameter. Sedangkan untuk distribusi Rayleigh dua campuran menjadi tiga parameter. Selanjutnya dengan estimasi maksimum *likelihood* diperoleh nilai awal dari setiap parameter. Namun disarankan kepada pembaca untuk menggunakan distribusi tunggal yang mempunyai parameter yang lebih dari satu, serta menggunakan lebih dari dua campuran sehingga menghasilkan distribusi campuran yang lebih baik.

Adanya penelitian yang lebih lanjut tentang estimasi parameter waktu hidup dengan menggunakan penaksir titik yang lain seperti menggunakan estimasi Bayes ataupun momen *generation function*, kemudian membandingkan hasil dari estimator tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Afify. W. M. “Clasisical Estimation of Mixed *Rayleigh* Distribustion in Type I Progressive Cencored”, *Journal of Statistical Theori and Application*, vol. 10, hal. 619-632, ISSN 1538-7887. 2011.

Bain, L.J. dan Engelhardt, M. *Introduction to Probability and Mathematical Statistik*, Duxbury of Wathfor, Inc. California. 1992.

Djauhari, M. A. *Statistik Matematika*. Bandung: Institut Teknologi Bandung. 1990.

Lauless, J. K. *Statistik Model and Methods for Lifetime Data*, John Willey and Sons, Inc. New York. 1982.

Papoulis, A. *Probabilitas, Variabel Random dan Proses Stokastik.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press. 1992.

Walpole, R. E. *Pengantar Statistik Edisi Ke-3*. Jakarta: PT Gramedia. 1995.

Yendra, Rado. Dkk. *Analisis Survival dan Program R*. Pekanbaru: Yayasan Pustaka Riau. 2010.